

Examen VWO

2023

tijdvak 0
zaterdag 1 april
13.30 - 16.30 uur

wiskunde B

Dit examen bestaat uit 17 vragen.

Voor dit examen zijn maximaal 73 punten te behalen.

Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Goniometrie

$$\sin(t + u) = \sin(t) \cos(u) + \cos(t) \sin(u)$$

$$\sin(t - u) = \sin(t) \cos(u) - \cos(t) \sin(u)$$

$$\cos(t + u) = \cos(t) \cos(u) - \sin(t) \sin(u)$$

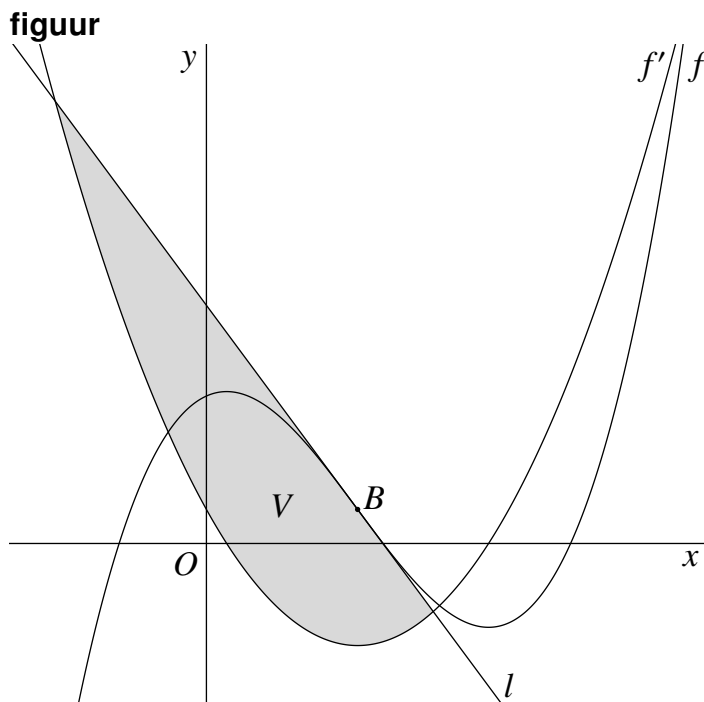
$$\cos(t - u) = \cos(t) \cos(u) + \sin(t) \sin(u)$$

$$\sin(2t) = 2 \sin(t) \cos(t)$$

$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2 \cos^2(t) - 1 = 1 - 2 \sin^2(t)$$

Ingesloten gebied

Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 13$. Punt B is het buigpunt van de grafiek van f . Lijn l raakt f in B . Het gebied V wordt ingesloten door de grafiek van de afgeleide van f en de lijn l . De situatie is weergegeven in de onderstaande figuur.

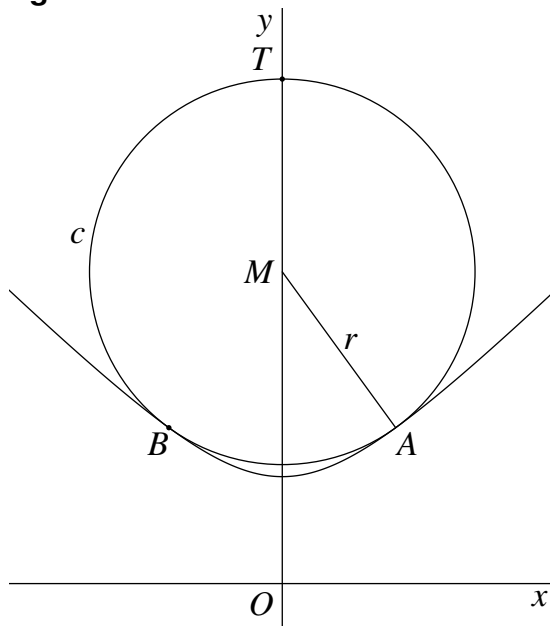


6p **1** Bereken de oppervlakte van V exact.

Raakcirkel aan hyperbool

Gegeven is de hyperbool, $y = \sqrt{x^2 + 2}$. Voor $p > 0$ onderzoeken we de cirkel c die aan deze hyperbool raakt in de punten $A(p, \sqrt{p^2 + 2})$ en $B(-p, \sqrt{p^2 + 2})$. Het middelpunt van deze cirkel noemen we M en de straal r . Zie de onderstaande figuur. In de figuur is p zo gekozen dat de bovenkant van de cirkel door het punt $T(0, 17\sqrt{2})$ gaat.

figuur



Uit symmetrieoverwegingen volgt dat de x -coördinaat van M gelijk is aan 0. De y -coördinaat van M kan worden berekend door op te merken dat AM loodrecht staat op de raaklijn van de hyperbool in A en vervolgens de formule op te stellen van de lijn door A en M .

5p **2** Toon aan dat de y -coördinaat van M gelijk is aan $2\sqrt{p^2 + 2}$.

3p **3** Toon aan dat $r = \sqrt{2p^2 + 2}$.

Om te berekenen voor welke waarde van p het bovenste deel van de cirkel door punt T gaat, moet de volgende vergelijking worden opgelost

$$2\sqrt{p^2 + 2} + \sqrt{2p^2 + 2} = 17\sqrt{2}.$$

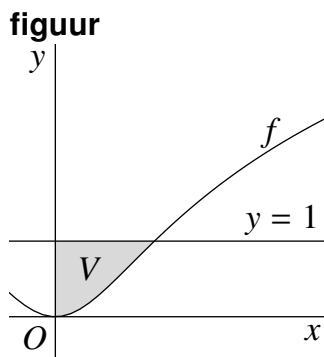
De wortels in deze vergelijking kunnen worden weggewerkt door te kwadrateren, de overgebleven wortel te isoleren en nogmaals te kwadrateren. Hierna kun je de vergelijking schrijven als

$$p^4 - 1728p^2 + 80640 = 0.$$

- 3p **4** Toon aan dat de vergelijking te schrijven is als $p^4 - 1728p^2 + 80640 = 0$.
- 4p **5** Bereken exact voor welke waarde van p het bovenste deel van de cirkel door punt T gaat.

Omwentelingslichaam

Gegeven is de functie $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. Het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f , de y -as en de lijn $y = 1$ noemen we V . Door V te wentelen om de y -as, ontstaat het lichaam W . Zie de onderstaande figuur.

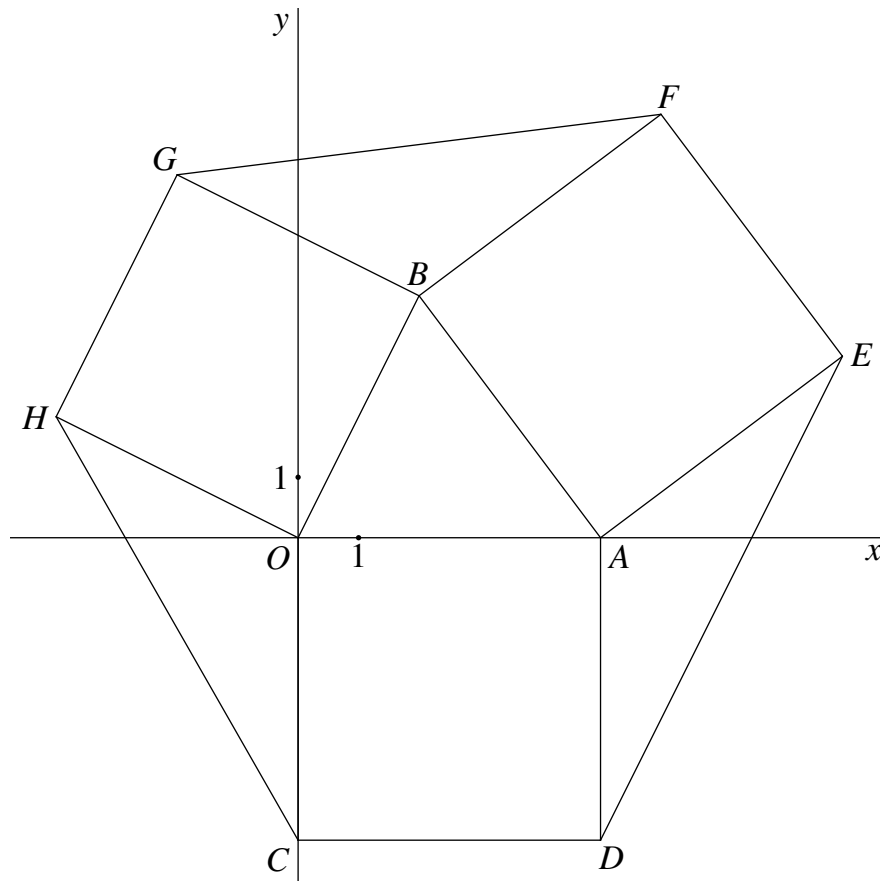


- 4p **6** Bereken exact de inhoud van W .

Stelling met vectoren

Gegeven zijn de punten $A(a, 0)$ en $B(b, c)$. We nemen aan dat $0 < b < a$ en $c > 0$. We zetten vierkanten op de zijden van driehoek OAB . De nieuwe punten noemen we C t/m H . We tekenen ook de lijnstukken DE , FG en CH . Zie de onderstaande figuur.

figuur



Er geldt nu dat $\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$ en $\vec{AB} = \begin{pmatrix} b-a \\ c \end{pmatrix}$.

$\vec{GF}$ kan als volgt berekend worden

$$\vec{GF} = \vec{GB} + \vec{BF} = \vec{b}_R + \vec{AB}_R = \begin{pmatrix} c \\ -b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c \\ a-2b \end{pmatrix}$$

7p **7** Bewijs dat $3 \cdot (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{AB}|^2) = |\vec{DE}|^2 + |\vec{GF}|^2 + |\vec{CH}|^2$.

Bacteriën in het lab

Petrischalen worden in laboratoria gebruikt om bacteriekweken mee te verrichten. De petrischaal is genoemd naar de Duitse bacterioloog Julius Richard Petri (1852-1921), die haar in 1877 bedacht toen hij als assistent bij Robert Koch werkte. Op de onderstaande foto zie je een kweek van de legionella bacterie.

foto



In een laboratorium onderzoekt men hoe de groei van een bacteriesoort afhangt van de temperatuur. Daarbij gaat men uit van een formule van de vorm $P = a \cdot T^b$. Hierin is P het groeipercentage per uur en T de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$.

Het blijkt dat bij 10°C de groei 2,0% per uur is. Bij 20°C is de groei 6,0% per uur.

- 5p **8** Bereken a en b in drie decimalen nauwkeurig.

Gebruik vanaf nu de formule $P = 0,05 \cdot T^{1,6}$.

- 5p **9** Bereken in één decimaal nauwkeurig de temperatuur waarbij de verdubbelingstijd van het aantal bacteriën tien uur is.

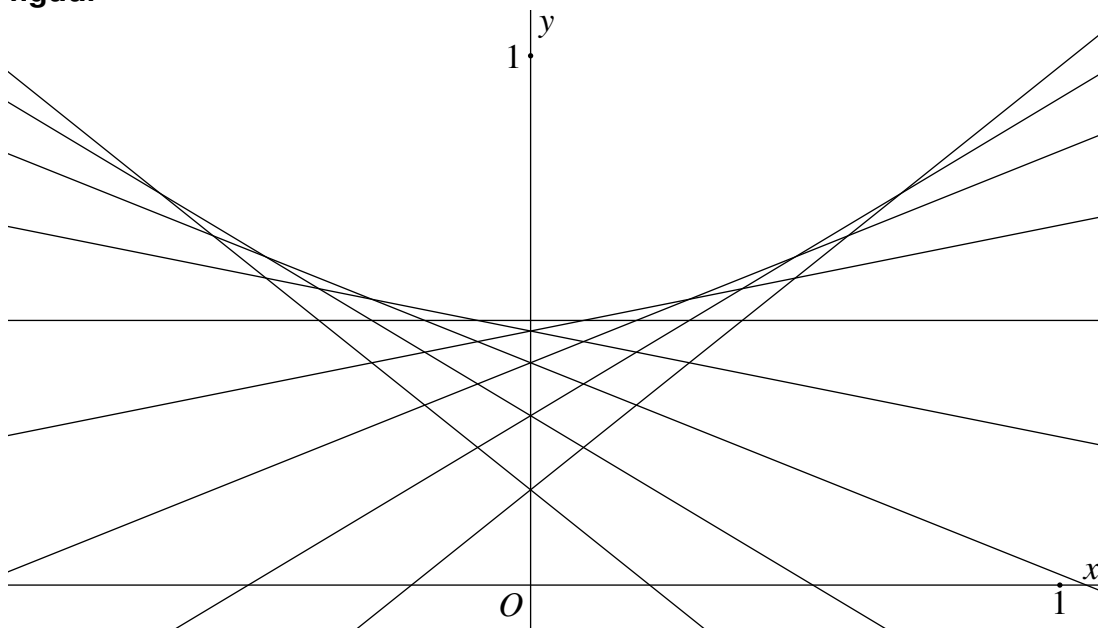
Limietkromme van snijpunten

Gegeven is de familie van lijnen

$$l_p : y = px + \frac{1}{2}(1 - p^2).$$

In de onderstaande figuur is l_p getekend voor p is gelijk aan alle gehele veelvouden van $\frac{1}{5}$ tussen -1 en 1 .

figuur



Het lijkt erop dat deze lijnen een mooie kromme vormen. Om deze kromme te vinden, gaan we eerst kijken naar het snijpunt van twee van deze lijnen.

We noemen $S_{p,q}$ het snijpunt van l_p en l_q , waarbij $p \neq q$.

- 5p **10** Toon aan dat $S_{p,q}(\frac{1}{2}(p + q), \frac{1}{2}pq + \frac{1}{2})$.

We kunnen punten van de kromme vinden door de snijpunten te bekijken in het geval $\lim_{q \rightarrow p}$.

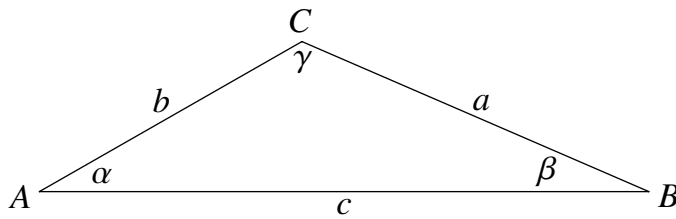
- 2p **11** Laat zien dat de kromme gegeven wordt door $k : y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$.

- 4p **12** Toon aan dat l_p en k elkaar raken voor alle waarden van p .

Sinusregel

Gegeven is $\triangle ABC$. Zie onderstaande figuur.

figuur



In het geval dat a , b en γ gegeven zijn, is het mogelijk om α te berekenen met de sinusregel. Uit de sinusregel volgt dat

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(180^\circ - \alpha - \gamma)}.$$

3p **13** Toon dit aan.

De formule kan worden omgeschreven naar de vorm

$$\tan(\alpha) = \frac{a \cdot \sin(\gamma)}{b - a \cdot \cos(\gamma)}.$$

5p **14** Toon dit aan.

Voor deze driehoek geldt dat $a = 5$, $b = 4$, $\sin(\gamma) = \frac{4}{5}$ en $\gamma > 90^\circ$.

4p **15** Bereken $\tan(\alpha)$ exact.

Maximum doorrijhoogte

Bij tunnels wordt aangegeven wat de maximale doorrijhoogte is. Als je voertuig hoger is dan de aangegeven maximale hoogte, dan kan dat leiden tot problemen, zoals te zien is op de onderstaande foto.

foto



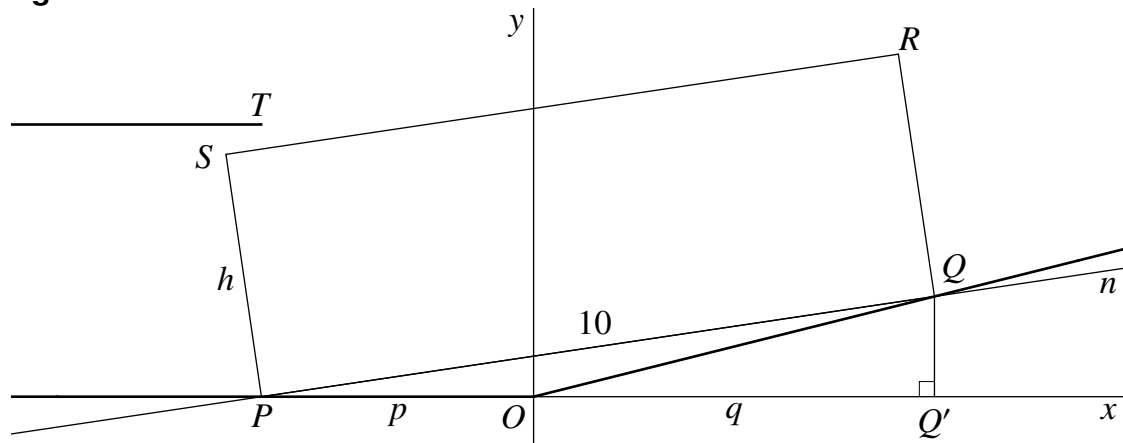
In deze som onderzoeken we de maximale doorrijhoogte met behulp van een wiskundig model, waarin de weg bestaat uit een lijn met een knik in de oorsprong en het voertuig wordt weergegeven door een rechthoek die met twee hoekpunten de weg volgt.

In de figuur hiernaast is een schematische weergave gemaakt van een voertuig dat een tunnel binnenrijdt. Het voertuig rijdt de tunnel in van rechts naar links. De helling die naar de tunnel leidt is de lijn vanuit de oorsprong met richtingscoëfficiënt $\frac{1}{4}$. De rest van de weg is de negatieve x -as. Het dak van de tunnel is de lijn die begint in punt $T(-4, 4)$ en evenwijdig is met de x -as.

De rechthoek $PQRS$ is het voertuig. Als het voertuig de tunnel binnen rijdt, dan beweegt punt P vanuit O over de negatieve x -as. Punt Q beweegt over de helling naar O toe. Zijde PQ is 10. Zijde PS is de hoogte, h , van het voertuig. Punt Q' is de loodrechte projectie van Q op de x -as. Lijn n gaat door P en Q .

De lengte van PO noemen we p , met $0 \leq p \leq 10$ en de lengte van OQ' noemen we q .

figuur



Een vergelijking van lijn n is

$$q \cdot x - \sqrt{1600 - q^2} \cdot y = q \left(q - \frac{1}{4} \sqrt{1600 - q^2} \right).$$

4p **16** Toon dit aan.

De waarde van h waarbij de auto net de tunnel raakt, kan worden berekend door de minimale afstand te berekenen van punt T tot lijn n .

4p **17** Bereken de waarde van h waarbij de auto net de tunnel raakt, rond af op 5 decimalen.